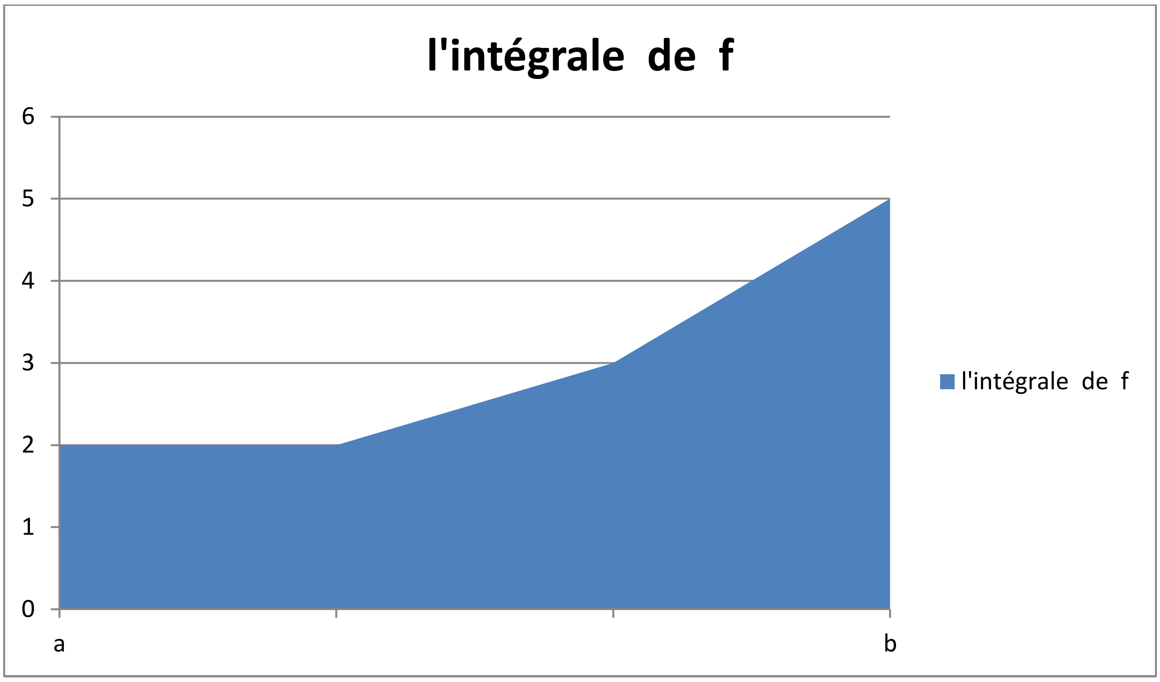
Chapitre 1 : Intégrales dépendants d'un paramètre

1-Rappel :

1.1-Présentation :

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$ *et* f *une fonction positive définie sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Le but de l'intégration est de calculer l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$.



Ce nombre est appelé l'intégrale de f sur $[a, b]$ *et noté :* $\int_{[a,b]} f$ *ou* $\int_a^b f(x)dx$.

1.2-Propriétèes :

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$

1- *L'intégrale est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.*

2- *Relation de Chasles :*

$$\forall c \epsilon]a,b[: \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction continue par morceaux est la somme d'intégrales de fonctions continues.

3- *Si f est positive sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

4- *Si $f \leq g$ sur $[a,b]$ alors* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

5- *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $|f|$ continue par morceaux sur $[a,b]$ et :* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

6- *Inégalité de la moyenne :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq sup\{|f(x)|, \quad x\epsilon[a,b]\} \int_a^b |g(x)|dx.$$

En particulier, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq sup\{|f(x)|, \quad x\epsilon[a,b]\}(b-a).$

7- *Inégalité de Cauchy-Schwartz :*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right).$$

Cette inégalité s'écrit aussi :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

8- *Somme de Riemann :*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(C_i)$$

où $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ et $C_i \epsilon [x_i, x_{i+1}]$.

1.3- Différentes méthode de calculs :

1.3.1- Théorème fondamentale de l'intégration :

Théorème :

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $x_0 \epsilon I$.

La fonction : $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ *est dérivable et* $\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$.

En conséquence, toute fonction réelle continue sur un intervalle I y admet des primitives.

Remarques :

1- *Si f est une fonction continue de I dans* $\mathbb{R}$ *et F est une de ses primitives alors :*

$$\forall (a, b) \epsilon I^2 : \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2- *Si f est de classe* C^1 *, alors :* $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Exemples :

1- $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

2- $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [Arctant]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

3- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

1.3.2- Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $(a,b)\epsilon I^2$.

On a:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemples :

1- *Calculons :* $I = \int_0^{\pi}(x^2+2x)sinxdx.$

Posons : $\begin{cases} f'(x) = sinx \\ g(x) = x^2+2x \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} f(x) = -cosx \\ g'(x) = 2x+2 \end{cases}$.

Par suite,

$$I = [-(x^2+2x)cosx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}(2x+2)cosxdx$$

$$= (\pi^2+2\pi) + 2\int_0^{\pi}(x+1)cosxdx$$

Une deuxième intégration par parties nous donne :

$$I = \pi(\pi+2) + 2[(x+1)sinx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sinxdx = \pi(\pi+2) - 4.$$

2- *Calculons :* $J = \int_1^e (x^3+2x)lnxdx.$

Posons : $\begin{cases} f'(x) = x^3+2x \\ g(x) = lnx \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 \\ g'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Par suite :

$$J = \left[\left(\frac{x^4}{4}+x^2\right)lnx\right]_1^e - \int_1^e\left(\frac{x^3}{4}+x\right)dx = \frac{e^4}{4} + e^2 - \left[\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$= \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{9}{16}$$

1.3. 3- Calcul par changement de variables :

Proposition :

Soient I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $\varphi: J \to I$ *une fonction de classe* C^1.

Si $(a,b)\epsilon J^2$ *alors :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du\,.$$

Exemples :

1- *Calculons l'intégrale suivante :* $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Posons $t = e^x$. *On a donc :* $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

Par suite :

$$I = \int_1^e \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt = \int_1^e \frac{t+1}{\sqrt{t+1}}dt - \int_1^e \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{t+1}^3 - 2\sqrt{t+1}\right]_1^e$$

2- *Calculons :* $J = \int_e^{2e} \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx.$

Posons : $t = lnx$. *On a donc :* $dt = \frac{dx}{x}$

Par suite : $J = \int_1^{1+ln2} \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t}^3\right]_1^{1+ln2}.$

2- Interversion limite- intégrale et sommation- intégrale :

2.1- limite- intégrale :

2.1.1- Théorème de convergence monotone :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions positives continues par morceaux sur un intervalle I.*

On suppose que : $\forall x \epsilon I$: $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite croissante, on note* $f(x)$ *sa limite.*

La fonction f est alors continue par morceaux sur I et la suite $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_n$ *croît vers* $\int_I f(x)dx$.

2.1.2- Lemme de Fatou :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions positives continues par morceaux sur I.*

La fonction $\lim inf(f_n)$ *est alors continue par morceaux sur I et l'on a :*

$$\int_I \lim inf f_n(x)dx \le \lim inf \int_I f_n(x)dx$$

2.1.3- Théorème de convergence dominée :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions continues par morceaux sur I si :*

1- *La suite* $(f_n)_n$ *converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.*

2- *Il existe une fonction* $g: I \to \mathbb{R}^+$ *continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant la condition de domination suivante :* $\forall x \epsilon I \ \forall n \epsilon \mathbb{N}: |f_n(x)| \le g(x)$.

Alors, les fonctions f_n *et f sont intégrables sur I et :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

Exemples :

1- *Etudions* $\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1+2sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}dt.$

Posons : $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*: f_n(t) = \frac{1+2sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}$ *et* $g(t) = \frac{3}{1+t^2}.$

On a bien : $\forall t\epsilon[-R,R]$ $\forall n\epsilon\mathbb{N}^*$: $|f_n(t)| \leq g(t)$ *avec g est intégrable sur* $[-R,R]$.

De plus, la suite $\left(f_n(t)\right)_n$ *converge simplement vers* $\frac{1}{1+t^2}.$

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1+2sin\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2}dt = \int_{-R}^{R}\frac{1}{1+t^2}dt = 2ArctanR$$

2- *Calculons :* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-t^n}dt.$

2.2- Interversion sommation- intégrale :

2.2.1- Théorème d'intégration terme à terme :

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, si :*

1- *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers une fonction* $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *qui est continue par morceaux sur I.*

2- *La série numérique* $\sum\int_I |f_n(x)|dx$ *converge.*

Alors, la fonction g est intégrable sur I et

$$\int_I g(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Autrement dit,

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx$$

Exemple :

Montrons que : $\int_0^1 \frac{lnt}{t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On sait que : $\forall t\epsilon[0,1[:\ \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$

Donc, $\forall t\epsilon[0,1[:\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-lnt)t^n = \frac{lnt}{t-1}$.

Par suite : $:\ \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-lnt)t^n\,dt = \int_0^1 \frac{lnt}{t-1}dt$.

Posons : $\forall t\epsilon]0,1[,\ \forall n\epsilon\mathbb{N}: f_n(t) = (-lnt)t^n$.

1- *Ces fonctions sont continues et intégrables sur* $]0,1[$, *en effet :*

$\lim_{t\to 0} \sqrt{t} f_n(t) = 0$. *Donc* $f_n(t)$ *est intégrable au voisinage de zéro.*

De plus, $\lim_{t\to 1} f_n(t) = 0$. *D'où le résultat.*

2- *La série fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement vers la fonction* $g(t) = \frac{lnt}{t-1}$ *qui est continue sur* $]0,1[$.

3- *La série numérique* $\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt$ *converge, en effet :*

$$\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 |(-lnt)t^n|dt = \int_0^1 (-lnt)t^n dt$$

Par une intégration par parties on trouve :

$\int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ *. d'où la série converge.*

Donc, en utilisant le théorème d'intégration terme à terme, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{lnt}{t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

3-Intégrale dépendant d'un paramètre:

3.1- La fonction : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$:

3.1.1- Proposition :

Soient f une fonction continue par morceaux sur I et $a\epsilon I$.

La fonction : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est continue sur I.*

3.1.2- Théorème :

Si f est continue sur I alors la fonction : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est une primitive de f sur I .*

C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

3.1.3- Remarques :

1. *Si f est continue sur I et* $a\epsilon I$ alors la *fonction :* $G(x) = \int_x^a f(t)dt$ *est dérivable sur I et $G'(x) = -f(x)$.*
2. *Si f est continue et positive sur $[a, b]$ alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0 \quad sur \quad [a, b]$$

3.1.4- Proposition :

Soient f une fonction continue sur I, α et β deux fonctions dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I.

La fonction définie sur J par : $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ *est dérivable sur J et :*

$$\varphi'(x) = \beta'(x)f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x)f\big(\alpha(x)\big)$$

3.1.5- Exemples :

1. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La fonction :* $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$ *est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall x\epsilon\mathbb{R}: F'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

2. *Considérons* $G(x) = \int_{x^2}^{e^x} Arcsin(t)dt$ *tel que* $x\epsilon[-1,0]$.

   La fonction $f(t) = Arcsin(t)$ *est continue sur* $I = [-1,1]$, *les deux fonctions* $\alpha(x) = x^2$ *et* $\beta(x) = e^x$ *sont dérivables sur* $J = [-1,0]$ *à valeurs dans I.*

   Donc, G est dérivable sur $[-1,0]$ *et*

$$\forall x\epsilon[-1,0]: G'(x) = e^x Arcsin(e^x) - 2xArcsin(x^2)$$

3.2- Fonctions définies par des intégrales :

Soient I un intervalle et f une fonction numérique définie sur $[a,b] \times I$.

Théorème 1 :

Si f est continue sur $[a,b] \times I$ *alors :*

$\forall y\epsilon I$, *la fonction :* $f_y: x \mapsto f(x,y)$ *est intégrable sur* $[a,b]$ *et la fonction :* $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *est continue sur I.*

Théorème 2 :

Si de plus, la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ qui est continue sur $[a,b] \times I$ alors :

F est continûment dérivable sur I et

$$\forall y \epsilon I : F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Autrement dit, pour dériver F, on peut dériver sous le signe de l'intégrale.

Théorème 3 :

Si f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $[a,b] \times I$ et u et v deux fonctions de classe C^1 de $I \rightarrow [a,b]$ alors, la fonction G définie par :

$G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$ *est dérivable sur I et :*

$$G'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y)$$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de : $G(y) = \int_y^{e^y} e^{x\cos y} dx$

3.3- Applications à des calculs d'intégrales :

La dérivation sous le signe de l'intégrale permet de calculer certaines intégrales plus rapidement surtout lorsqu'on ne connait pas de primitive.

Exemple :

Soit $t > 0$, calculons l'intégrale : $F(t) = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2} dx.$

Posons : $G(t) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2} dx$ *et* $\varphi(x,t) = \frac{1}{x^2+t^2}.$

Il est claire que pour tout $x \in [0,1]$, φ *est dérivable par rapport à t sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et :*

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = -\frac{2t}{(x^2+t^2)^2}$ *et cette dérivée est continue sur* $[0,1] \times \mathbb{R}^{+*}$.

Donc d'après le théorème précèdent, G est continument dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et sa dérivée :*

$$G'(t) = -2tF(t)$$

D'une autre part,

$$G(t) = \frac{1}{t} Arctan\left(\frac{1}{t}\right)$$

Par suite,

$$G'(t) = -\frac{1}{t^2} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{t^2} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

D'où :

$$F(t) = -\frac{1}{2t} G'(t) = \frac{1}{2t^2}\left(\frac{1}{t} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{1+t^2}\right)$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2+t^2)^2} dx = \frac{1}{2t^2}\left(\frac{1}{t} Arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{1+t^2}\right)$$

3.4- Fonctions définies par une intégrale généralisée :

Soient I un intervalle et f une fonction de deux variables continue sur $]a, +\infty[\times I$.

On considère la fonction F définie sur I par :

$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$

3.4.1- Théorème1 :

S'il existe une fonction positive g définie, continue par morceaux et intégrable sur $]a,+\infty[$ *telle que :*

$$\forall (x,y) \in]a,+\infty[\times I: \ |f(x,y)| \leq g(x)$$

Alors, F existe et continue sur I.

3.4.2- Théorème2 :

Si de plus f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continue sur* $]a,+\infty[\times I$ *et il existe une fonction positive h définie, continue par morceaux et intégrable sur* $]a,+\infty[$ *telle que :*

$$\forall (x,y) \in]a,+\infty[\times I: \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq h(x)$$

Alors, F est de classe C^1 *sur I et :*

$F'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

Exemple :

Calculons : $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} cos(xy)dx$ *pour* $y \in \mathbb{R}$.

Posons : $f(x,y) = e^{-x^2} cos(xy)$ *tel que :* $(x,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ *et :*

$$|f(x,y)| \leq g(x) = e^{-x^2} ,$$

avec g est positive continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Donc, la fonction I est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est dérivable par rapport à y de dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^{-x^2}sin(xy)$$

Il est clair que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ *est continue sur* $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ *et :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq h(x) = xe^{-x^2}$$

avec h est positive continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Alors, I est de classe C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$I'(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = -\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}sin(xy)dx$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$I'(y) = \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}sin(xy)\right]_0^{+\infty} - \frac{y}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}cos(xy)dx$$

$$= -\frac{y}{2}I(y)$$

Par suite, $\frac{I'(y)}{I(y)} = -\frac{y}{2}$

D'où, en intégrant par rapport à y, on a :

$$I(y) = Ce^{-\frac{y^2}{4}}$$

Or, $I(0) = \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = C$

Finalement,

$$I(y) = \int_0^{+\infty}e^{-x^2}cos(xy)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}$$